EXAMEN DE PRÁCTICA 24/02/2025 Nombre: Carrera:

Regulares: Ejercicios del 1 al 5. Libres: Ejercicios del 1 al 7.

---

1. Sea una matriz compleja A cuyo polinomio característico es $p(\lambda) = (\lambda - 2)^3(\lambda - 1)^2$. Se pide:
   a) Determinar todas las posibles formas de Jordan.
   b) En cada caso del item a), determinar cuál es la dimensión del autoespacio correspondiente a cada autovalor y su polinomio minimal.

2. Considerar la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & z & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -2 & 0 \\ -7 & -10 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, se pide:
   a) Hallar z de manera que 3 sea un autovalor de A.
   b) Encontrar una base de $N(A - 3I)$.
   c) Determinar, si es posible, una matriz inversible S y una matriz diagonal D tal que $S^{-1}AS = D$. Justificar.

3. Dado el espacio vectorial $V = \mathbb{R}_3[x]$ con las operaciones usuales y $\beta = \{1, x^3, 1 - x, x^2\}$ una base de V, se pide:
   a) Dar la base β^* de V^* calculada a partir de β.
   b) Si $h : V \to \mathbb{R}$ / $h(a + bx + cx^2 + dx^3) = (a + b) - (c + a)$, probar que $h \in V^*$ y hallar $[h]_{\beta^*}$ siendo β^* la base hallada en el item a).

4. a) Analizar si $W = \{A \in \mathbb{R}^{3\times3} / A = A^T\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{3\times3}$ con la suma y el producto por escalar usual.
   b) Si se considera en $\mathbb{R}^{3\times3}$ el producto interno definido por $A \times B = tr(AB^t)$, hallar $S^{\perp}$ siendo $S = \left\{ A \in \mathbb{R}^{3\times3} / A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ a & b & 1 \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

5. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar adecuadamente.
   a) Sea $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Entonces $\sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle \langle u, v_i \rangle = \langle v, u \rangle \ \forall\, u, v \in \mathbb{R}^n$.
   b) Si $\{u_1, u_2, ..., u_r, w_1, w_2, ..., w_s\}$ es un conjunto linealmente independiente de un espacio vectorial V, entonces $\langle \{u_1, u_2, ..., u_r, \} \rangle \cap \langle \{, w_1, w_2, ..., w_s\} \rangle = \{0\}$.

Regulares: Ejercicios del 1 al 5. Libres: Ejercicios del 1 al 7.

---

6. Dado $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x - 2y + 6z = 0\}$ espacio vectorial con el producto interno usual y $v = (-3, 1, 4)$. Se pide:

   a) Hallar $W^{\perp}$.

   b) Calcular la proyección del vector v sobre W.

7. Hallar una matriz de permutación P, una triangular inferior L y una triangular superior U tales que $PA = LU$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.