

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
ANÁLISIS MATEMÁTICO II
Licenciatura y Profesorado en Física,
Licenciatura en Ciencias de la Computación
Licenciatura y Profesorado en Matemática,

Apellido y Nombre:..... Legajo: ..... Carrera: .....

EXAMEN FINAL - 9 de febrero de 2023

Importante: Resuelva cada ejercicio en hojas diferentes, por favor.

1. Sea f_a la función dada por
$$f_a(x) = \frac{(x+2)^2}{x-2a}.$$
   a) Determine el dominio de f_a e indique para qué valores de a es posible redefinir f_a de modo que resulte una función continua en $\mathbb{R}$. ¿Qué ocurre en los valores donde esto no es posible?
   b) Encuentre los máximos y/o mínimos locales de f_a y determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f_a.
   c) Decida si f_a posee máximos y/o mínimos absolutos. Justifique.
   d) Determine los intervalos de concavidad y convexidad de f_a para $a = 1$.
   e) Esboce las gráficas de f_1 y f_{-1}, y verifique lo anterior.

2. Considere las funciones $f(x) = 6x - x^2 + 5$ y $g(x) = x^2 - 4x + 5$. Sea R la región encerrada entre las gráficas de f y g.
   a) Grafique R.
   b) Calcule el volumen del cuerpo que se obtiene al rotar la región R alrededor del eje x.

3. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   a) Pruebe que f admite derivadas direccionales en $(0,0)$ en la dirección de cualquier $v \in \mathbb{R}^2$.
   b) Decida si f es diferenciable en $(0,0)$.

4. Pruebe las siguientes propiedades.

   a) Si f es una función integrable en $[a,b]$, entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es continua en $[a,b]$.

   b) Sea f una función n-veces derivable en (a,b), $c \in (a,b)$ y sea $P_{n,c}(x)$ el polinomio de Taylor de f alrededor de c de orden n. Sea $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$. Entonces $\tilde{P}(x) = \int_c^x P_{n,c}(t)\,dt$ es el polinomio de Taylor de orden $n+1$ de F alrededor de c. Verifique esta propiedad con un ejemplo.

5. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifique:

   a) Sea $f : B \to \mathbb{R}$ definida en una bola de centro (a,b) y tal que existe $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$. Entonces
   $$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\operatorname{sen}(f(x,y))}{f(x,y)} = 1.$$

   b) La integral impropia $\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$ es convergente.

   c) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(x) > 0$ para cada $x \in [a,b]$. Entonces el conjunto $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], 0 < y < f(x)\}$ es abierto.

   d) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y,z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, donde A es una matriz real invertible 3×3. Entonces f es diferenciable y biyectiva en $\mathbb{R}^3$ con inversa diferenciable f^{-1}. La matriz jacobiana de f^{-1} es $Jf^{-1}(x,y,z) = A^{-1}$ para cada $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. (Recuerde que A^{-1} es una matriz tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, donde I es la matriz identidad).