EXAMEN FINAL 27/02/2024

1. Encontrar la forma canónica de Jordan de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Probar que toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tiene...

   a) un subespacio invariante de dimensión 1.

   b) un subespacio invariante de dimensión 2.

3. Sean p_1, p_2, p_3, p_4 en $\mathbb{K}_3[x]$ los polinomios de grado menor o igual a 3. Determinar en cada caso si la condición dada es suficiente para concluir que el conjunto $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ es linealmente dependiente:

   i) $p_i(1) = 0$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

   ii) $p_i(0) = 1$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

   Sugerencia: Para *i*) analizar el funcional $f \in (\mathbb{K}_3[x])^*$ que a cada polinomio p le asigna $f(p) = p(1)$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorfismo tal que $f(1,1,0,0) = (0,1,0,-1), f(1,0,1,0) = (1,1,1,0)$. Calcular la matriz asociada a f en la base canónica cuando $f^2 = Id$.

5. a) 1) Sea $\Phi : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi(p(x), q(x)) = \sum_{k=0}^{2} p(k)q(k).$$

   Probar que Φ es un producto interno.

   2) Calcular $\|3x - x^2\|$.

   3) ¿Es $\{x - 1, x^2 - 2x, 3\}$ una base ortonormal?

   b) Sea $V = \mathbb{R}^3$ y sea H subespacio de V tal que $H = \{(a,b,c)^t \in \mathbb{R}^3 : a = 2b = 3c\}$.

   1) Determinar una base ortonormal para $H^\perp$.

   2) Expresar el vector $v = (1,2,-1)^t$ como la suma de un vector $h \in H$ y un vector $w \in H^\perp$.

Scanned with CamScanner