Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Ciencias de la Computación
Complementos de Matemática II

Nombre y Apellido: Legajo:

Examen Final

1. Es bien sabido que en caso de que la categoría $\mathcal{C}$ tenga coproductos, entonces todo morfismo $f : X + Y \to R$ puede ser escrito utilizando dos morfismos $X \to R$ y $Y \to R$.
En este ejercicio intentaremos internalizar en algún sentido esta propiedad. Para poder hablar de mofismos dentro de la categoría, asumiremos que $\mathcal{C}$ además de tener coproductos también es CCC. Sean X e Y dos objetos fijos de la categoría $\mathcal{C}$. Se proponen las siguientes asignaciones de objetos a objetos:

$$F(C) = C^{X+Y}$$
$$G(C) = C^X \times C^Y$$

1. Dotar de estructura functorial a F y G. Probar específicamente que F es functor.
2. Definir una transformación natural $\alpha : F \dot{\to} G$, con la intención de internalizar el argumento provisto al comienzo del ejercicio.

2. Sea G un grupo tal que para un entero fijo $n > 1$, resulta $(xy)^n = x^n y^n$ para todos $x, y \in G$. Sean $G^n = \{x^n \mid x \in G\}$ y $G_n = \{x \in G \mid x^n = e\}$.

1. Probar por inducción que para $r \in \mathbb{N}$, a y b elementos de G, resulta $ab^r a^{-1} = (aba^{-1})^r$.
2. Probar que G^n y G_n son subgrupos normales de G.
3. Probar que si G es finito, entonces el orden de G^n es igual al índice de G_n.

3. Probar que en todo retículo resultan válidas las siguientes proposiciones universales:

1. $a \vee b \vee c = a \wedge b \wedge c$ implica $a = b = c$.
2. Si $a \leq c$ y $b \leq d$ entonces $a \vee b \leq c \vee d$.