Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Ciencia de la Computación
Complementos de Matemática II

Nombre y Apellido:

Examen Final (regulares y libres)

1. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $m \times n$ con coeficientes en un retículo L

a) Mini-max Theorem. Probar que

$$\bigvee_{j=1}^{n} \Big(\bigwedge_{i=1}^{m} a_{ij} \Big) \leq \bigwedge_{k=1}^{m} \Big(\bigvee_{\ell=1}^{n} a_{k\ell} \Big).$$

b) Utilizar el anterior ítem para probar la *desigualdad distributiva*:

$$a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

2.

a) Dar un ejemplo de un grupo infinito G que tiene exactamente un elemento de orden 2.

b) Dar un ejemplo de un grupo infinito H el cual todo elemento, excepto el neutro, tiene orden 2.

c) Verdadero o Falso: Existe un subgrupo K de G tal que $H \simeq G/K$.

3. Sea $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor fully faithful (i.e. $F : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(F(A), F(B))$ es una biyección para todos A, B).

a) Probar que si $f : A \to B$ es tal que $F(f)$ es un isomorfismo, entonces f es un isomorfismo.

b) Probar que si A, B son dos objetos tales que $F(A) \simeq F(B)$, entonces $A \simeq B$.

4. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto terminal $\mathbf{1}$. Decimos que un objeto Ω de $\mathcal{C}$ es un *clasificador de subobjetos* si existe un morfismo $\mathbf{1} \to \Omega$ tal que para cada monomorfismo $j : U \to X$ existe un único morfismo $\chi_j : X \to \Omega$ tal que el siguiente diagrama es un pull-back.

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbf{1} \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[\chi_j]{} & \Omega \end{array}$$

Probar que $\Omega = \{0, 1\}$ es un clasificador de subobjetos en **Set**. *Ayuda:* los monomorfimos en **Set** son las funciones inyectivas.

5. Probar que un funtor adjunto a derecha preserva productos.