07-E/9

ALGEBRA Y GEOMETRIA I- Examen febrero 2001.

Nombre: Legajo:
Carrera: Nota:

1) Hallar $z = \left( \frac{z_1^2}{z_2} + \overline{z_3} \right)^{1/3}$ siendo $|z_1| = 2$; $\arg z_1 = -\frac{\pi}{4}$ ; $z_2 = i$ ; $z_3 = 2i$

2 Hallar la proyección del punto P (-8, 12) sobre la recta que contiene a los puntos A (2, -3) y B(-5, 1).

3 Calcular el volumen de un tetraedro de vértices (1, -1, 0); (2, -1, -1); (-4, 4, 0) y (i, 2, 1)

4) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $r_1 \begin{cases} -3x - 2y = 0 \\ 4y + 3z - 12 = 0 \end{cases}$

y es paralelo a la recta $r_2)\ x - 1 = \frac{y}{-2} = \frac{z+7}{5}$

5) Estudiar y graficar la siguiente ecuación: $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 4 = 0$

6) Hallar la ecuación del cono cuyo vértice es el punto (3, -1, -2) y la directriz es la curva $\Gamma \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$.

7) Efectuar el estudio completo (simetrías, intersección con los ejes y planos coordenados, intersección con planos paralelos a los coordenados) y hacer la gráfica de la superficie de ecuación: $2x^2 + y^2 - 4z^2 = -4$ .

**ALGEBRA Y GEOMETRÍA I - Final Dic. 2008**

**Apellido y nombre:**.....**Legajo Nº**.....

**Carrera:**.....**Comisión:**.....**Profesor:**.....

---

Libres sin ingreso aprobado resuelven los problemas:1-2-3-5-6-8
Libres con ingreso aprobado 2-3-5-6-7-8

**Problema 1**

a) Halle la descomposición factorial del polinomio $P(x) = x^5 + 3x^3 - 4x$

b) Represente gráficamente el conjunto $A=\left\{z \in C : 1 < |z| \leq 3, |\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi\right\}$

c) Dibuje las raíces de P(x) que están contenidas en A.

**Problema 2**

a) Determine $|\bar{a} \wedge \bar{b}|$ sabiendo que $\bar{a}$ se encuentra en el plano coordenado XY y tiene módulo 3, mientras que $\bar{b}$ tiene la dirección y sentido del versor $\bar{k}$ y módulo 4.

b) Represente el siguiente conjunto de puntos: $A = \{(x, y) \in R^2 : -3x + 2y > -6\}$

**Problema 3**

a) Halle la ecuación del plano perpendicular a la recta r) de ecuaciones $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-2t \\ z = 1+3t \end{cases}$

$t \in R$ y que contiene al punto P = (-1,2,3).

b) Encuentre las coordenadas del punto de intersección entre la recta r) y el plano definido en el ítem a).

c) Encuentre las coordenadas de los puntos de la recta que se encuentran a 5 unidades del plano.

**Problema 4**

Encuentre las ecuaciones paramétricas para la recta que contiene al punto A(0,1,2), es paralela al plano $x + y + z = 2$ y perpendicular a la recta: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \quad t \in R \\ z = 2t \end{cases}$

**Problema 5**

Represente gráficamente a la curva de ecuación $7x^2 + 5y^2 + 2\sqrt{3}xy = 32$. Defina luego a la misma como un lugar geométrico del plano.

Continúa

PROM

**ALGEBRA Y GEOMETRÍA 1** **PARCIAL Nº 4**

**COMISIÓN 52**

| APELLIDO Y NOMBRE: Corallo Paula | | FECHA: 20/11/08 |
|---|---|---|
| LEGAJO: C-5601/4 | CARRERA: AGRIMENSURA | CALIFICACIÓN: Siete |

1) a) Una circunferencia cuyo centro es (4, -1) pasa por el foco de la parábola $x^2 + 16y = 0$. Averiguar si dicha circunferencia es o no tangente a la directriz de la parábola. Justificar la respuesta.

2) a) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P$, cuya distancia al punto $A(4,0)$ es cuatro veces su distancia a la recta $x = -6$. Describir y graficar dicho lugar.

b) Deducir, a partir de su definición, la ecuación de una parábola con centro en el origen de coordenadas, foco sobre el eje x y ramas hacia la izquierda. Graficar.

3) a) Analizar la siguiente ecuación general de 2° grado, identificando el lugar geométrico que representa.

$$x^2 - 4xy + y^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 3 = 0$$

b) Obtener su representación gráfica indicando focos, vértices, asíntotas, etc..

c) Determinar las coordenadas de los focos en ambos sistemas de referencia.

d) Escribir las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola con centro $C(h,k)$ y eje focal paralelo al eje x. Graficar la hipérbola y las asíntotas.

$$\frac{5\,(x'+2)^2}{25} + \frac{y'^2}{25} = 1$$

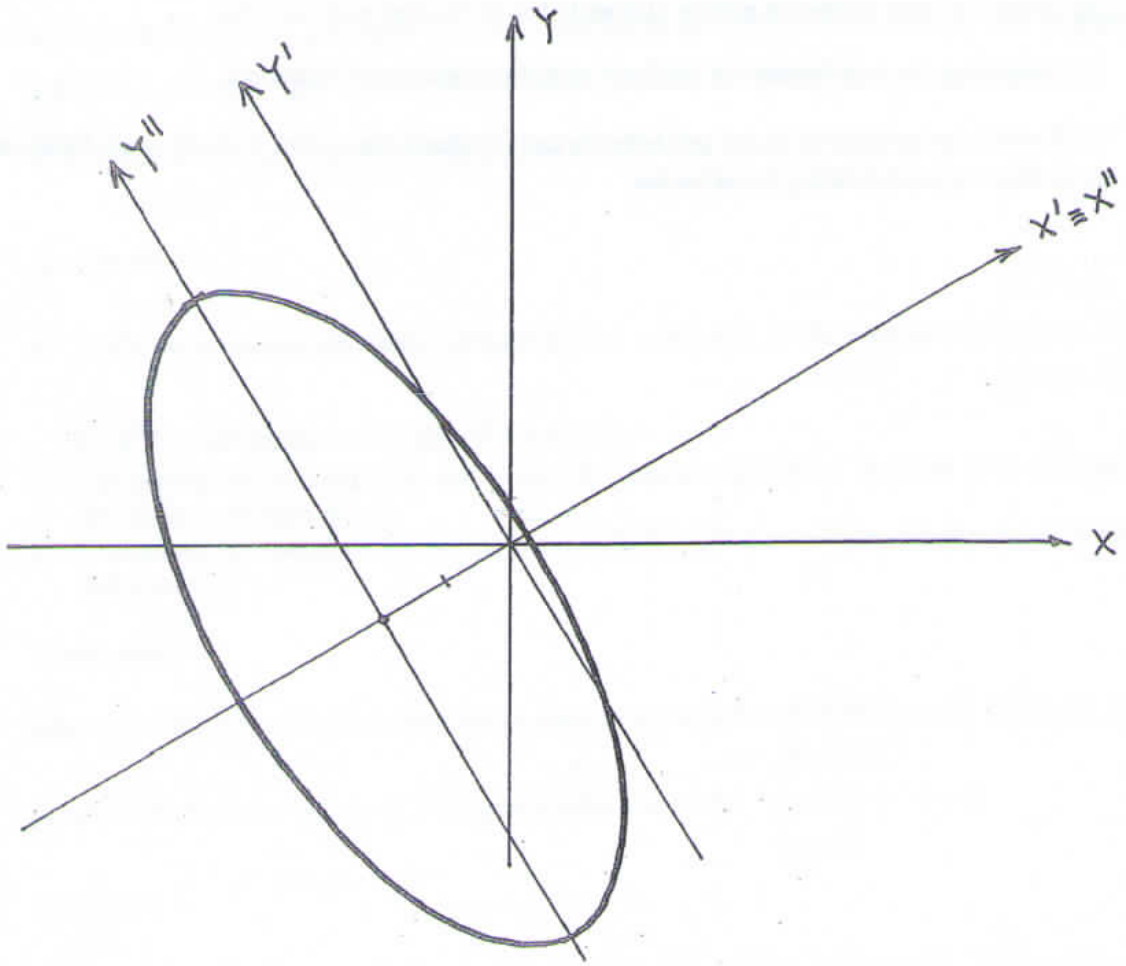
$$\boxed{\frac{(x'+2)^2}{5} + \frac{y'^2}{25} = 1}$$

traslación :

$$\boxed{\begin{aligned} x'' &= x'+2 \\ y'' &= y' \end{aligned}}$$

queda :

$$\boxed{\frac{x''^2}{5} + \frac{y''^2}{25} = 1}$$



$$4.\ x^2 = 3x'^2 - 2\sqrt{3}\,x'y' + 1\cdot y'^2$$

$$2.\ y^2 = \frac{1}{2}x'^2 + \sqrt{3}\,x'y' + \frac{3}{2}y'^2$$

$$2\sqrt{3}.\ xy = \frac{3}{2}x'^2 + \sqrt{3}\,x'y' - \frac{3}{2}y'^2$$

$$5x'^2 \qquad + 1\cdot y'^2$$

$$10.\sqrt{3}.\ x = 15x' - 5\sqrt{3}\,y'$$

$$10.\ y = 5x' + 5\sqrt{3}\,y'$$

$$20x'$$

queda: $\boxed{5x'^2 + y'^2 + 20x' = 5}$

$$5x'^2 + 20x' + y'^2 = 5$$

$$5\left[x'^2 + 4x'\right] + y'^2 = 5$$

$$5\left[(x'+2)^2 - 4\right] + y'^2 = 5$$

$$5(x'+2)^2 - 20 + y'^2 = 5$$

$$5(x'+2)^2 + y'^2 = 25$$

5.

a) Verifique que a través de una conveniente rotación de ejes la ecuación:
$4x^2 + 2\sqrt{3}xy + 2y^2 + 10\sqrt{3}x + 10y = 5$ ( * ) se transforma en $5u^2 + v^2 + 20u = 5$

b) Represente gráficamente la curva y obtenga las coordenadas del centro de simetría en el mismo sistema que está dada la ecuación ( * ).

---

$A = 4$

$B = 2\sqrt{3}$

$C = 2$

$B^2 - 4AC = (2\sqrt{3})^2 - 4.4.2 = -20$

↓

tipo elíptico

¡hago 1° la rotación!

$$\boxed{\operatorname{cotg}(2\alpha) = \frac{A-C}{B}} = \frac{4-2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \sqrt{3} \longrightarrow 2\alpha = 60° \longrightarrow \underline{\alpha = 30°}$$

↓

$\operatorname{sen}\alpha = 1/2$

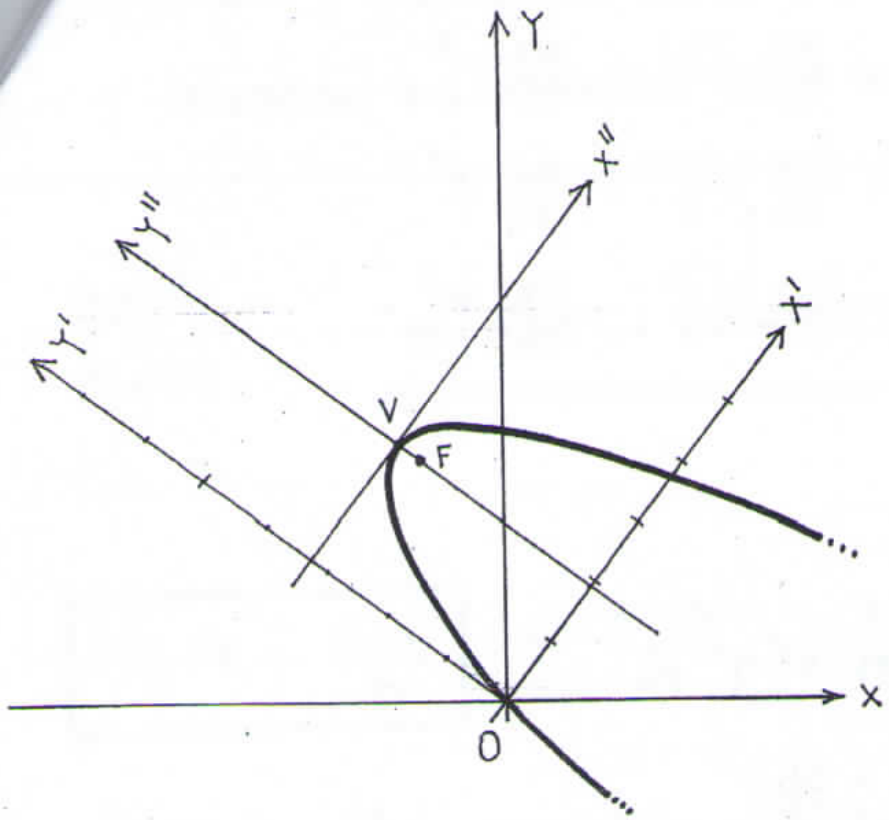
$\cos\alpha = \sqrt{3}/2$

$$\boxed{\begin{aligned} X &= \frac{\sqrt{3}}{2}X' - \frac{1}{2}Y' \\ Y &= \frac{1}{2}X' + \frac{\sqrt{3}}{2}Y' \end{aligned}}$$

$$X^2 = \frac{3}{4}X'^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}X'Y' + \frac{1}{4}Y'^2$$

$$Y^2 = \frac{1}{4}X'^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}X'Y' + \frac{3}{4}Y'^2$$

$$XY = \frac{\sqrt{3}}{4}X'^2 + \frac{1}{2}X'Y' - \frac{\sqrt{3}}{4}Y'^2$$




$$X''^2 = -\frac{28}{25}\,Y''$$

$$\downarrow$$

$$2p = -\frac{28}{25}$$

$$p = -\frac{14}{25}$$

∴ el foco es el punto

$$F\left(0; -\frac{7}{25}\right)$$

$x''$ $\quad$ $Y''$

la "antitraslación" es :

$$\left.\begin{aligned} X' &= X'' + \frac{48}{25} = 0 + \frac{48}{25} = \frac{48}{25} \\ Y' &= Y'' + \frac{576}{175} = -\frac{7}{25} + \frac{576}{175} = \frac{527}{175} \end{aligned}\right\} \quad F\left(\frac{48}{25}; \frac{527}{175}\right)$$

$x'$ $\quad$ $Y'$

la "antirrotación" es :

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{3}{5}X' - \frac{4}{5}Y' = \frac{3}{5}\cdot\frac{48}{25} - \frac{4}{5}\cdot\frac{527}{175} = -\frac{44}{35} \\ Y &= \frac{4}{5}X' + \frac{3}{5}Y' = \frac{4}{5}\cdot\frac{48}{25} + \frac{3}{5}\cdot\frac{527}{175} = \frac{117}{35} \end{aligned}\right\} \quad F\left(-\frac{44}{35}; \frac{117}{35}\right)$$

$x$ $\quad$ $Y$

éstas son las coordenadas del foco en el sistema origi

$$9.x^2 = \frac{81}{25}x'^2 - \frac{216}{25}x'y' + \frac{144}{25}y'^2$$

$$16.y^2 = \frac{256}{25}x'^2 + \frac{384}{25}x'y' + \frac{144}{25}y'^2$$

$$24.xy = \frac{288}{25}x'^2 - \frac{168}{25}x'y' - \frac{288}{25}y'^2$$

---

$$\frac{625}{25}x'^2$$

$$-80.x = -48x' + 64y'$$

$$-60.y = -48x' - 36y'$$

---

$$= -96x' + 28y'$$

$$\boxed{25x'^2 - 96x' + 28y' = 0}$$

$$25\left(x'^2 - \frac{96}{25}\right) + 28y' = 0$$

$$25\left[\left(x' - \frac{48}{25}\right)^2 - \frac{2304}{625}\right] + 28y' = 0$$

$$25\left(x' - \frac{48}{25}\right)^2 - \frac{2304}{25} + 28y' = 0$$

$$25\left(x' - \frac{48}{25}\right)^2 = -28y' + \frac{2304}{25}$$

$$25\left(x' - \frac{48}{25}\right)^2 = -28\left(y' - \frac{576}{175}\right)$$

$$\boxed{\left(x' - \frac{48}{25}\right)^2 = -\frac{28}{25}\left(y' - \frac{576}{175}\right)}$$

traslacion:

$$\boxed{\begin{aligned} x'' &= x' - 48/25 \\ y'' &= y' - 576/175 \end{aligned}}$$

y la ecuación queda:

$$\boxed{x''^2 = -\frac{28}{25}\cdot y''}$$

Estudiar y graficar la curva $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 80x - 60y = 0$ (1)

y determinar sus elementos en el sistema $(O, x, y)$ original

---

$A = 9$

$B = 24$

$C = 16$

$B^2 - 4AC = 24^2 - 4 \cdot 9 \cdot 16 = 0 \rightarrow$ tipo parabólico

↓

¡ hago la rotación !

$$\boxed{\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{A-C}{B}} = \frac{9-16}{24} = -\frac{7}{24}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{24}{7} \longrightarrow 2\alpha = -73^\circ 44' \rightarrow \begin{cases} \alpha = -36^\circ 52' \\ \alpha = 53^\circ 7' \end{cases} \quad +90^\circ$$

↓

$\operatorname{sen} \alpha = 4/5$

$\cos \alpha = 3/5$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' \\ y &= \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' \end{aligned}}$$

$$x^2 = \frac{9}{25}x'^2 - \frac{24}{25}x'y' + \frac{16}{25}y'^2$$

$$y^2 = \frac{16}{25}x'^2 + \frac{24}{25}x'y' + \frac{9}{25}y'^2$$

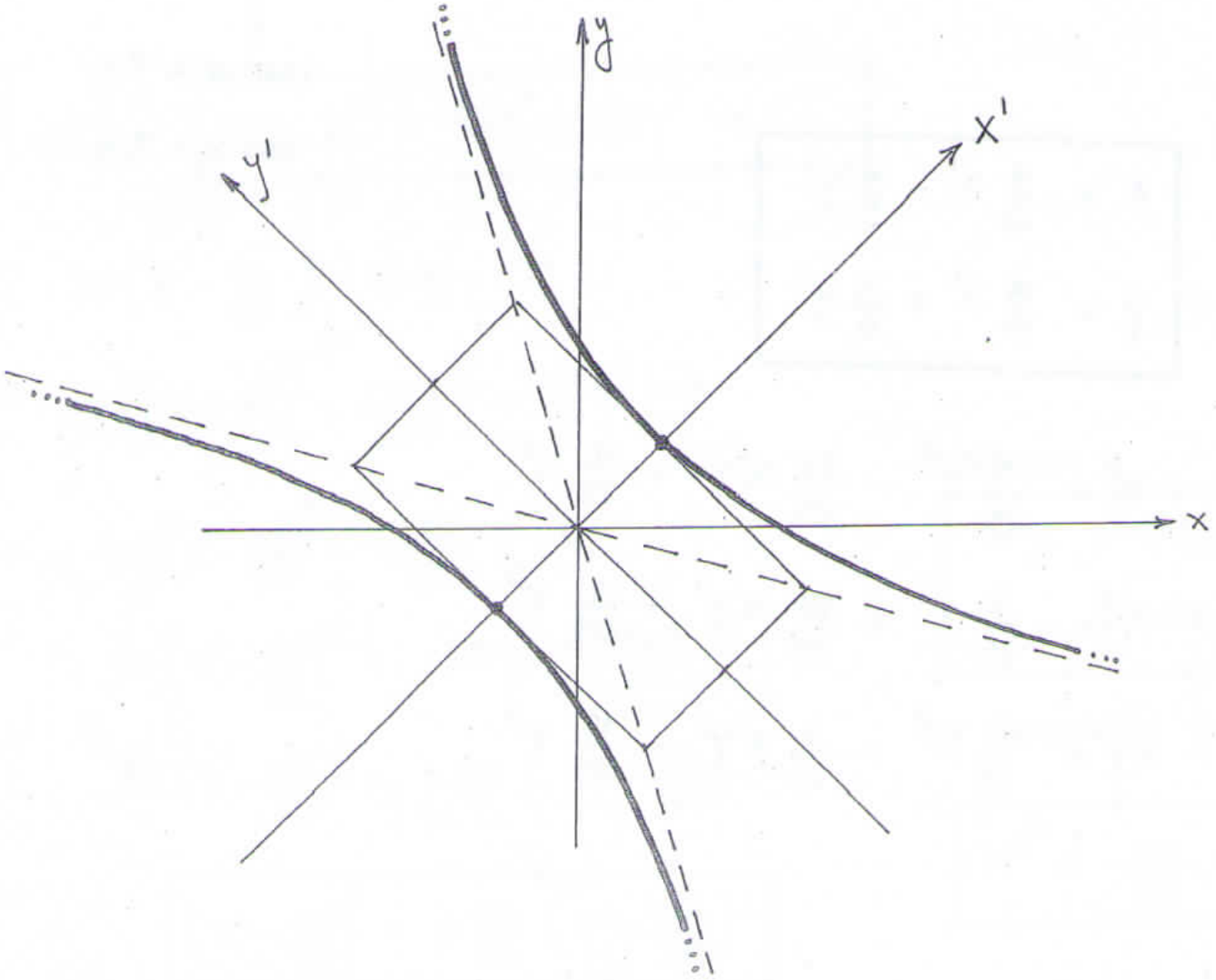
$$xy = \frac{12}{25}x'^2 - \frac{7}{25}x'y' - \frac{12}{25}y'^2$$

$$6x'^2 - 2y'^2 = 18$$

$$\frac{6x'^2}{18} - \frac{2y'^2}{18} = \frac{18}{18}$$

$$\boxed{\frac{x'^2}{3} - \frac{y'^2}{9} = 1}$$

$= 1{,}73$ $\qquad$ $= 3$



- Hago la ROTACIÓN

$$\begin{cases} x = \cos 45° \cdot x' - \operatorname{sen} 45° \cdot y' \\ y = \operatorname{sen} 45° \cdot x' + \cos 45° \cdot y' \end{cases}$$

$$x^2 = \frac{1}{2}x'^2 - x'y' + \frac{1}{2}y'^2$$

$$y^2 = \frac{1}{2}x'^2 + x'y' + \frac{1}{2}y'^2$$

$$xy = \frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2$$

$$2x^2 = x'^2 - 2x'y' + y'^2$$

$$+\ 2y^2 = x'^2 + 2x'y' + y'^2$$

$$8xy = 4x'^2 - 4y'^2$$

$$6x'^2 - 2y'^2$$

$\therefore$ queda: $6x'^2 - 2y'^2 - 18 = 0$

Estudiar y graficar la curva

$$2x^2 + 8xy + 2y^2 - 18 = 0$$

---

$$B^2 - 4.A.C = 8^2 - 4.2.2 = (48) > 0$$

↓

tipo HIPERBÓLICO

- busco el centro de simetría ⟶ pero como la ecuación no tiene términos lineales, el centro es $C(0;0)$ y no necesito hacer la traslación.

- Evalúo $f$ en el centro de simetría (para descartar los casos degenerados)

$$f(0;0) = (-18) \neq 0 \longrightarrow \text{¡es una HIPÉRBOLA!}$$

- Busco el ángulo que anule el término rectangular

$$\boxed{\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{A-C}{B}} = \frac{2-2}{8} = \boxed{0}$$

↓

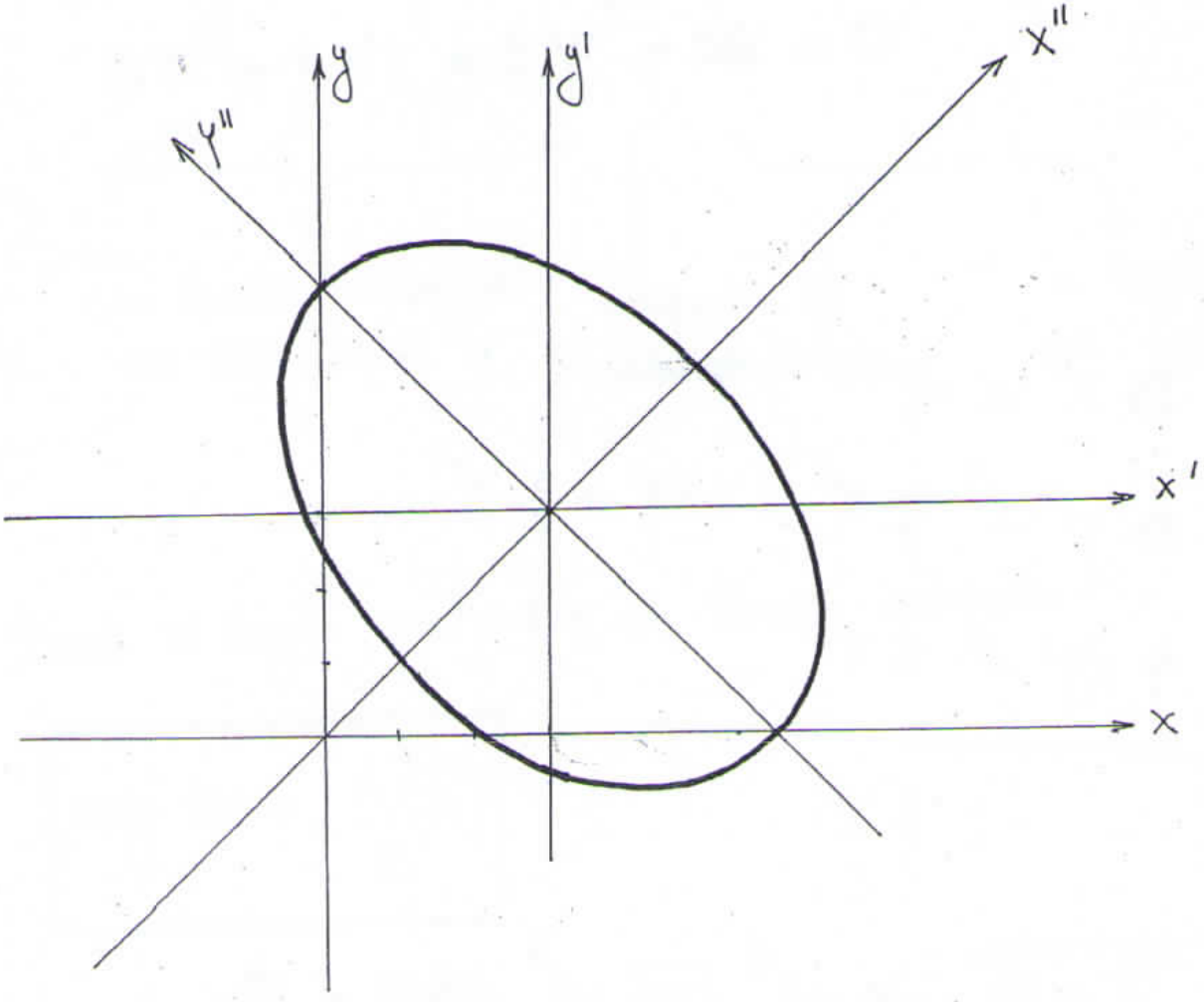
$$\underline{\alpha = 45°}$$

$$7\,x''^2 + 3\,y''^2 = 56$$

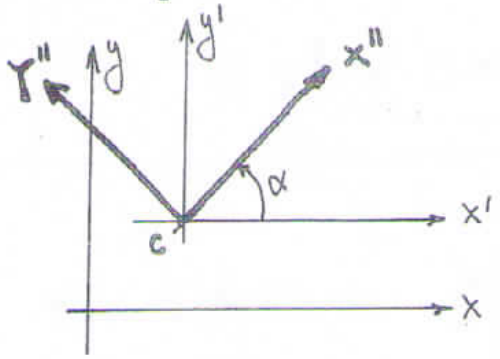
$$\frac{7\,x''^2}{56} + \frac{3\,y''^2}{56} = \frac{56}{56}$$

$$\boxed{\frac{x''^2}{8} + \frac{y''^2}{56/3} = 1}$$

$b = 2{,}83$ $\qquad$ $a = 4{,}32$



• Hago una ROTACIÓN con $\alpha = 45°$




$$\begin{cases} x' = \cos 45° \cdot x'' - \operatorname{sen} 45° \cdot y'' \\ y' = \operatorname{sen} 45° \cdot x'' + \cos 45° \cdot y'' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2} x'' - \frac{\sqrt{2}}{2} y'' \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2} x'' + \frac{\sqrt{2}}{2} y'' \end{cases} \longrightarrow$$

$$x'^2 = \frac{1}{2} x''^2 - x''y'' + \frac{1}{2} y''^2$$

$$y'^2 = \frac{1}{2} x''^2 + x''y'' + \frac{1}{2} y''^2$$

$$x'y' = \frac{1}{2} x''^2 \qquad - \frac{1}{2} y''^2$$

$$5\,x'^2 = \frac{5}{2} x''^2 - 5x'y'' + \frac{5}{2} y''^2$$

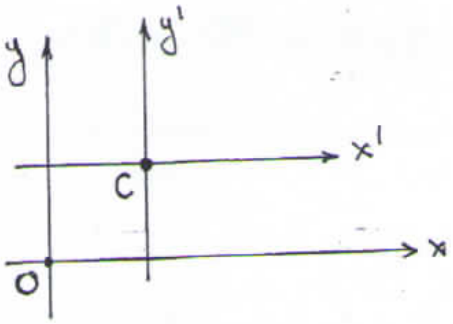
$$+\ 5\,y'^2 = \frac{5}{2} x''^2 + 5x''y'' + \frac{5}{2} y''^2$$

$$4\,x'y' = 2x''^2 \qquad - 2y''^2$$

$$7x''^2 \qquad + 3y''^2$$

∴ queda $7x''^2 + 3y''^2 - 56 = 0$

- Hago una TRASLACIÓN con nuevo origen $C(3;3)$




$$\begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' + 3 \end{cases}$$

y reemplazo en la ec. original:

$$5.(x'+3)^2 + 4.(x'+3).(y'+3) + 5(y'+3)^2 - 42(x'+3) - 42(y'+3) + 70 = 0$$

pero esto queda (siempre) así:

$$5x'^2 + 4x'y' + 5y'^2 - 56 = 0$$

los términos cuadráticos son invariantes

desaparecen los términos lineales

el término indep. es $f(c)$

- Busco el ángulo que anule el término rectangular

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{A-C}{B}$$

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{5-5}{4} = 0 \longrightarrow \alpha = 45°$$

Estudiar y graficar la curva:

$$5x^2 + 4xy + 5y^2 - 42x - 42y + 70 = 0$$

---

$$B^2 - 4AC = 4^2 - 4.5.5 = (-84) < 0$$

↓

tipo ELÍPTICO

- busco el centro de simetría de la curva resolviendo el sig sistema:

$$\begin{cases} \text{derivo c/resp. a } x \longrightarrow & 10x + 4y - 42 = 0 \\ \text{derivo c/resp a } y \longrightarrow & 4x + 10y - 42 = 0 \end{cases}$$

↓ resolviendo el sistema

$$C(3;3)$$

- Evalúo $f$ en el pto C hallado (para descartar los casos degenerados.

$$f_{(C)} = 5.3^2 + 4.3.3 + 5.3^2 - 42.3 - 42.3 + 70 = (-56) < 0$$

↓

¡es una ELIPSE!