7,64

(P)

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

(R-122) ANÁLISIS MATEMÁTICO II PLAN 2010

SEGUNDO PARCIAL - 7 DE JUNIO DE 2013

Apellido, Nombre: RAIMUNDO ANTONIO e-mail: AMR_15793@HOTMAIL.COM
Legajo: R- 88608/7

1. Hallar las primitivas de la función $g(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$.
2. Dada $g(x) = 3x \sin x^2$, se define $f(s) = \int_0^s g(x)dx$ para $s \geq 0$. Calcular $f(0)$, $f(\sqrt{\pi})$ y $f'(s)$.
3. Dado el campo escalar definido por

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{y^2+x^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1/2 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Analizar la continuidad de h en $\mathbb{R}^2$.

4. Dado el campo escalar $f(x,y) = xy - 2xy^2$
   a) Determinar el dominio de f y justificar la existencia del gradiente de f.
   b) Hallar y clasificar los puntos críticos de f.
   c) Calcular los extremos absolutos de f en el triángulo de vértices $(0,0)$, $(-1,1)$ y $(1,1)$.
5. Determine la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados, justificando adecuadamente su respuesta:
   a) Si $f(x,y,z) = x+y+z$, la derivada direccional de f en $P = (2,2,1)$ en la dirección del vector $\bar{u} = (1,1,1)$ es $\sqrt{3}$.
   b) Si S es la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$, la ecuación del plano tangente a S en $P = (2,2,1)$ es $x+y+z = 5$.
   c) Si $f(x,y)$ admite derivadas parciales en $\bar{a} = (1,2)$ entonces f es continua en $\bar{a}$.
   d) En todo punto crítico hay un extremo.
6. Definir extremo local y absoluto de un campo escalar.
7. Definir matriz Hessiana de un campo escalar definido en $\mathbb{R}^2$.

PARCIAL - ANALISIS MATEMATICO II

RAIMUNDO ANTONIO.

① $\int \frac{x}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\cdot \ln|u| + C$ ✓

$= \frac{1}{2}\cdot \ln|x^2-1| + C$ ✓

$u = x^2-1$

$du = 2x\,dx$ ✓

② $G(x) = 3x\cdot \operatorname{sen} x^2$ ✓

$F(s) = \int_0^s G(x)\,dx$ PARA $s \geq 0$

- $F(0) = \int_0^0 G(x)\,dx = 0$ ✓

DEFINICIÓN: $\int_A^A F = 0$.

- $F(\sqrt{\pi}) = \int_0^{\sqrt{\pi}} 3x\cdot \operatorname{sen} x^2\,dx$.

$\int_0^{\sqrt{\pi}} 3x\cdot \operatorname{sen} x^2\,dx = 3\cdot\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cdot \operatorname{sen} x^2\,dx$

$= \frac{3}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x\cdot \operatorname{sen} x^2\,dx = \frac{3}{2}\cdot\int_0^{\pi} \operatorname{sen} u\,du = \frac{3}{2}\cdot(-\cos u)\Big|_0^{\pi}$

$t = x^2$

$dt = 2x\,dx$ ✓

$(\sqrt{\pi})^2 = \pi$

$(0)^2 = 0$ ✓

$= \frac{3}{2}\cdot(-\cos\pi - (-\cos 0)) = \frac{3}{2}\cdot(1+1) = \frac{3}{2}\cdot 2 = \boxed{3}$ ✓

- $F'(s)$ COMO $G(x)$ ES UNA FUNCIÓN CONTINUA, POR COMPOSICIÓN DE FUNCIONES CONTINUAS, Y DERIVABLE (IDEM). POR EL 1ER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO INTEGRAL, $F'(s) = G(x)$ ∴ $F'(s) = 3s\operatorname{sen} s^2$ ✓

REPRESENTA EL AREA DE LA REGION QUE ESTA POR DEBAJO DE LA GRAF. DE G. ENTRE 0 Y $\sqrt{\pi}$ ✓

DE GRADO NEGATIVA

③ $H(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{y^2+x^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1/2 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ en $\mathbb{R}^2$.

H es continuo, en $(0,0)$ si y solo si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = 1/2 = F(0,0)$

· $\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) =$

$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta \end{cases}$ $\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta}{\rho^2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta + \rho^2 \cdot \cos^2\theta} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta}{\rho^2 \cdot (\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)} =$

$= \lim_{\rho\to 0} \operatorname{sen}^2\theta \cdot = \operatorname{sen}^2\theta$.

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ / y como el límite depende del valor de θ el límite no existe y por lo tanto F no es continua. en $(0,0)$. ¿en los demás ptos de $\mathbb{R}^2$?

④ $F(x,y) = x \cdot y - 2 \cdot x \cdot y^2$.

Ⓐ Dom $F = \mathbb{R}^2$. ✓ ¿por qué existen f_x, f_y?

Sea, $F_x(x,y) = y - 2y^2$ Estos campos escalares

$F_y(x,y) = x - 4xy$ son continuos en $\mathbb{R}^2$

Entonces, F es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, y como es diferenciable admite la existencia del vector gradiente de F.

Ⓑ $\nabla F(x,y) = (F_x, F_y) = (y - 2y^2,\ x - 4xy)$

Busco (x,y) / $\nabla F(x,y) = \vec{0}$

$\begin{cases} y - 2y^2 = 0 \to 1 - 2y = 0 \to y = \frac{1}{2} \\ x - 4xy = 0 \to x - 2 \cancel{4} x \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 0 \Rightarrow 1 - 2x = 0 \to x = \frac{1}{2} \end{cases}$ o $y = 0$ (error.)

Luego, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ X es un punto crítico de F. $(1/2, 1/2)$

Calculo las derivadas segundas

$F_{xx} = 0$ $F_{yx} = 1 - 4y$

$F_{xy} = 1 - 4y$ $F_{yy} = -4x$

$$H_F(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1-4y \\ 1-4y & -4x \end{pmatrix}$$

RAIMUNDO ANTONIO

$\det H_F(x,y) = 0 - (1-4y)^2 = -(1-4y)^2$

$\det H_F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = -\left(1-\frac{4}{2}\right)^2 = -1$

arrastra

COMO EL $\det H_F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ES UN PUNTO DE

c) DOM F: $\{(x,y): x=-1 \wedge y=1\} \cup \{(x,y): x=0 \wedge x\in[0,1]\}$ ENSILLADURA.

$\cup \{(x,y): x=1 \wedge y=1\}$

EL UNICO PUNTO CRITICO DE F EN TODO $\mathbb{R}^2$ ES $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ LUE

F NO TIENE PUNTO CRITICO EN EL INTERIOR DE D.

$\therefore (-1,1), (1,1), (0,0), (0,1) \in \partial F$

- Si $x=0$, $F(0,y) = 0 \quad \forall y \in [0,1]$.
- Si $y=1$, $F(x,1) = -3x$

LUEGO $F(x) = -3x \quad \forall x \in [-1,1]$

$F(-1) = 3 \rightarrow$ MAX.

$F(1) = -3 \rightarrow$ MIN.

$F(-1,1) = -1+2 = 1$

$F(1,1) = -1$

$\therefore F(-1,1) = 1$ ES UN MAXIMO ABSOLUTO.

$F(1,1) = -1$ ES UN MINIMO ABSOLUTO

incompleto

(5) a) $F(x,y,z) = x+y+z$ $\quad P=(2,2,1)$ $\quad \vec{U}=(1,1,1)$

$D_{\vec{U}_0} F(2,2,1) = \nabla F(2,2,1) \times \vec{U}_0$ $\quad \vec{U}_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

F ADMITE GRADIENTE YA QUE F ES UN CAMPO ESCALAR CONTINUO POR SER POLINÓMICO, Y SUS DERIVADAS PARCIALES SON CONTINUAS

$\nabla F(x,y,z) = (1,1,1)$,

$D_{\vec{U}_0} F(2,2,1) = \nabla F(2,2,1) \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$= (1,1,1) \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ✓

$= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

∴ VERDADERO.

b)

$S: x^2+y^2+2z^2 = 10$ $\quad P=(2,2,1)$ $\quad \nabla f(P_0) \cdot (\vec{P}-\vec{P}_0) = 0$.

$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0) = \underbrace{10}_{x}$

$F_x^{(x,y,z)} = 2x$, $F_y^{(x,y,z)} = 2y$, $F_z^{(x,y,z)} = 4z$.

$4\cdot(x-2) + 4(y-2) + 4\cdot(z-1) = 10$

$4x - 8 + 4y - 8 + 4z - 4 = 10$

$4x + 4y + 4z = 30$

$4\cdot(x+y+z) = 30$

$x+y+z = \frac{15}{2}$.

∴ FALSO.

LA ECUACIÓN DEL PLANO TANGENTE A S ES $x+y+z = \frac{15}{2}$

c) Si $F(x,y)$ ADMITE DERIVADAS PARCIALES EN $\bar{A}=(1,2)$ ENTONCES F ES CONTINUA EN $\bar{A}$.

FALSO ✓ ¡ADEMÁS LAS DERIVADAS PARCIALES DEBERÍAN SER CONTINUAS PARA QUE LA FUNCIÓN SEA DIFERENCIABLE.

¿un ejemplo? Y POR PROPIEDAD DE FUNCIONES DIFERENCIABLES, ENTONCES F SERÍA CONTINUA. PUEDE PASAR QUE F TENGA DERIVADAS PARCIALES Y ADEMÁS NO SEA CONTINUA.

Raimundo Antonio.

⑤ En todo Punto crítico Hay un Extremo

Falso: ✓ No siempre todo Punto crítico es Extremo, Pueden Existir Puntos de Ensilladura.

Ejemplo: En el Ejercicio 4, el Punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es un Punto Crítico Pero No es un Extremo. ✓

⑥ Un Extremo Absoluto de un campo escalar $(F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ Punto $\bar{A} \in D$ es aquel que $F(\bar{A}) \geq F(\bar{x}) \ \forall x \in D$ (Máximo Absoluto) o $F(\bar{A}) \leq F(\bar{x}) \ \forall x \in D$. (Mínimo Absoluto) ✓

Un Extremo local, es un un Máximo o Mínimo Pero no de todo el Dominio sino que son Absolutos en un entorno del Punto que Pertenece al Dominio. ✓

⑦ Matriz Hessiana de c.c en $\mathbb{R}^2$. ✓ ✓

Sea $F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y 2 veces diferenciable se llama Matriz Hessiana de F, a la Matriz dada por las derivadas parciales segundas de F.

$$H_F(x,y) = \begin{pmatrix} F_{xx}^{(x,y)} & F_{xy}^{(x,y)} \\ F_{yx}^{(x,y)} & F_{yy}^{(x,y)} \end{pmatrix}$$

$$\text{Det } H_F(x,y) = F_{xx} \cdot F_{yy} - F_{yx} \cdot F_{xy}$$