Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
**ANÁLISIS MATEMÁTICO II**
Licenciatura y Profesorado en Física,
Licenciatura en Ciencias de la Computación
Licenciatura y Profesorado en Matemática,

---

Apellido y Nombre:..... Legajo: ..... Carrera: .....

---

**EXAMEN FINAL - 16/02/2023**

**Importante: Resuelva cada ejercicio en hojas diferentes, por favor**.

1. Considere la función $F(x) = \int_0^x \ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right) dt$.

   *a*) Determine el dominio de $F$.

   *b*) Analice si $F$ es par o impar.

   *c*) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f$ y decida si $F$ posee máximos y/o mínimos locales. Justifique, si existen, si alguno de ellos es un extremo absoluto.

   *d*) Determine los intervalos de concavidad y convexidad de $F$.

   *e*) Determine si $F$ posee asíntotas verticales y esboce su gráfica.

2. Sea $C$ el cuerpo que se obtiene de intersecar una esfera de radio 4 centrada en el origen y el cilindro obtenido de girar la recta $x = 1$ alrededor del eje $y$. Determine el volumen de $C$.

3. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   *a*) Pruebe que $f$ es continua en $\mathbb{R}^2$.

   *b*) Pruebe que $f$ posee derivadas direccionales en $(0,0)$ en la dirección de cualquier vector $v = (a,b)$ de $\mathbb{R}^2$.

   *c*) Decida si $f$ es diferenciable en $(0,0)$.

4. *a*) Enuncie y demuestre el Teorema Fundamental del Cálculo.

   *b*) Defina que se entiende por una función diferenciable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en un punto $u_0 \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que si $f$ es diferenciable en $u_0$ entonces es continua en $u_0$.

   *c*) Sea $f$ una función derivable tantas veces como querramos en $\mathbb{R}$. Pruebe que si $|f^{(n)}(x)| \leq 2^n$ para cada $x \in \mathbb{R}$ y cada $n \in \mathbb{N}$, entonces es posible aproximar a $f$ en $[a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}]$ por un polinomio de Taylor adecuado con un error menor a $10^{-5}$, cualquiera sea $a \in \mathbb{R}$.

5. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente la respuesta.

   *a*) La integral impropia $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$ es convergente.

   *b*) Sean $A$ y $B$ subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^2$. Entonces $A \cap B$ es abierto.

   *c*) Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tal que $f$ es continua en $a$ y $g$ es continua en $b$. Entonces $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $h(x, y) = f(x) + g(y)$ es continua en $(a, b)$.