Álgebra Lineal 2024 (LM - PM - LCC)

Examen de práctica 17/02/2025 Nombre: Carrera:

Promovidos: Ejercicios 1 y 2. Regulares: Ejercicios del 1 al 5. Libres: Ejercicios del 1 al 7.

---

1. Sea una matriz compleja A cuyo polinomio característico es $p(\lambda) = (\lambda - 7)^5(\lambda - 3)^2$ y cuyo polinomio minimal es $m(\lambda) = (\lambda - 7)^2(\lambda - 3)^2$. Se pide:

   a) Determinar todas las posibles formas de Jordan.

   b) En cada caso del item *a*), determinar cuál es la dimensión del autoespacio correspondiente a cada autovalor.

2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T(x, y) = (x + 3y, 3x - 2y)$. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean T-invariantes.

3. Sea $V = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \ : \ A \text{ es triangular inferior } \}$ y V^* su espacio dual.

   a) Determinar si $f : V \to \mathbb{R}$ tal que
   $$f\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = (b - a)c$$
   satisface que $f \in V^*$.

   b) Hallar una base B de V que contenga a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y dar B^* su base dual.

4. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal y $(\cdot, \cdot)_W$ un producto interno en W. Demostrar que $(x, y)_V = (T(x), T(y))_W$, es un producto interno en V si y sólo si T es un monomorfismo.

5. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar adecuadamente.

   a) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x]/3p(0) + p(1) = 1\}$ es un espacio vectorial sobre los $\mathbb{R}$.

   b) Si $T = \{w_1 = t - 1, \ w_2 = t + 1\}$ es base para $\mathbb{R}_1[x]$, entonce existe una base $S = \{v_1, v_2\}$ para $\mathbb{R}_1[x]$ tal que la matriz de cambio de base de T a S es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

   c) Si $\{v_i\}_{i=1}^m$ es una base para un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$, $c \neq 0$ y $u_j = cv_j - b_j v_m$ con $j = 1, 2, ..., m-1$; entonces $\{u_j\}_{j=1}^{m-1}$ es linealmente independiente pero no es una base para V.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119