Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Licenciatura en Ciencias de la Computación

Complementos de Matemática II (2020)

Primer Parcial

Nombre y apellido: ..... Fecha: .....

1. Sea $(A, \leq)$ un orden total. Para todo $a \in A$ se define

$$A_a = \{x \in A : x < a\}.$$

Siendo $\mathcal{A} = \{A_a : a \in A\}$, probar que $(A, \leq) \simeq (\mathcal{A}, \subseteq)$.

2. Sea X un conjunto y $\mathrm{Eq}(X)$ el conjunto de todas las relaciones de equivalencia en X. Probar que:

   a) $L = (\mathrm{Eq}(X), \subseteq)$ es un retículo.

   b) Graficar L para $X = \{0, 1, 2\}$.

   c) Mostrar que L es acotado.

   d) Decidir si L admite estructura de retículo complementado.

3. Sea $(L, \vee, \wedge)$ un retículo y $\sim$ una relación de equivalencia en L. Decimos que $\sim$ es *compatible* si

$$x \sim x' \text{ e } y \sim y' \implies \begin{cases} x \vee y \sim x' \vee y' \\ x \wedge y \sim x' \wedge y' \end{cases}$$

para todos $x, x', y, y' \in L$.

   a) Mostrar que si $\sim$ es una relación compatible en $(L, \vee, \wedge)$, entonces existe una única estructura de retículo en $L/\!\sim$ tal que la proyección al cociente $\pi : L \to L/\!\sim$ es un morfismo de retículos.

   b) Mostrar que si $f : L \to K$ es un morfismo de retículos, entonces $\ker f$ es una relación compatible. Más aún, probar que si f es sobreyectiva, entonces $L/\ker f \simeq K$.