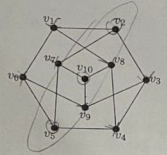
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
Av. Pellegrini 250. S2000BTP Rosario. Sta. Fe

Primer examen parcial - 01/10/2025

Apellido y nombre:

Legajo: DNI: Carrera:

1. Sea G el grafo de la figura.



   a) Graficar el subgrafo inducido en G por los vértices $v_1, v_2, v_7, v_8, v_{10}$.

   b) Determinar el número de estabilidad $\alpha(G)$ y el número de clique $\omega(G)$. Justificar.

   c) Analizar si existe un conjunto estable maximal en G que no sea máximo.

2. Dado un conjunto A y una familia de subconjuntos de A, el *grafo de intersección* de la familia de subconjuntos es el grafo cuyos vértices son los elementos de la familia y sus aristas unen vértices correspondientes a pares de subconjuntos cuya intersección es no vacía.

   a) Determinar si el grafo intersección de los subconjuntos de dos elementos de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ es bipartito, euleriano y/o hamiltoniano, exhibiendo en cada caso la correspondiente bipartición, circuito o ciclo cuando exista.

   b) Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ demostrar que el complemento del grafo de intersección de la familia de subconjuntos de dos elementos es isomorfo al grafo del ejercicio 1.

3. Sea G un grafo bipartito.

   a) Probar que si G tiene bipartición $[X, Y]$, entonces

$$\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v) = |E(G)|.$$

   b) Sea H un subgrafo propio de G con al menos un vértice en cada conjunto de la bipartición. Probar que

$$\alpha(H) \geq \frac{|V(H)|}{2}$$

   donde $\alpha(H)$ es el número de estabilidad de H.

c) Sea G k-regular bipartito. Probar que para todo $S \subseteq X$ se cumple:

$$|N(S)| \geq |S|$$

donde $N(S)$ es el conjunto de vecinos de S.

4. Analizar la veracidad de las siguientes afirmaciones, justificando adecuadamente.

   a) Sea G un grafo hamiltoniano. Toda arista $e \in E(G)$ pertenece a algún ciclo de G.

   b) Sea G un grafo conexo y bipartito con bipartición $[X, Y]$. Luego, $\alpha(G) = \max\{|X|, |Y|\}$.

   c) Si G es un grafo tal que G y $\bar{G}$ son eulerianos, entonces $|V(G)|$ es impar.