FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
LÓGICA

Primer Parcial 2022

1. El operador binario $>$ tiene la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p > q$
T	T	F
T	F	T
F	T	F
F	F	F

1. Extender la definición de semántica para incluir al operador $>$
2. Definir reglas de introducción y eliminación para $>$
3. Demostrar, utilizando deducción natural y las reglas definidas en 2:

$$r > \neg(p > q) \vdash (r > q) \to p$$

2. Uno de los siguientes secuentes no es válido. Determinar cuál es y probar su invalidez. Para cada uno de los secuentes válidos encontrar una prueba en deducción natural. Realice una en forma lineal y otra en forma de árbol.

1. $\neg((p \to q) \to (r \to s)) \vdash \neg s$
2. $\neg p \vee q \vdash (r \to p) \to (r \to q)$
3. $p \vee q, \neg q \vee r \vdash p \to r$

3. Sean $\phi, \psi \in \text{PROP}$ Demuestre sin usar soundness/completitud:

(a) $\models ((\phi \vee \psi) \wedge \psi) \leftrightarrow \psi$

(b) $\phi \to \psi \models (\neg\phi \vee \psi)$

4. Luciano ha decidido aprender un poco más de lógica, por lo que ha ido a la Biblioteca y se puso a leer sobre silogismos. Uno que le llamó la atención es el **silogismo disyuntivo**, o **Modus tollendo ponens**, que puede escribirse así: *si se nos dice que al menos una de dos proposiciones es verdadera; y también se nos dijo que no es la primera la que es verdadera; se puede inferir que debe ser la última la que es verdadera.*

1. Escriba la regla de secuente asociada a este silogismo.
2. Luciano decide agregar esta regla a nuestro sistema de deducción natural, y quiere demostrar que se preserva soundness ¿Podrá hacerlo? En caso afirmativo, ayúdelo y demuestre que al agregar esta regla a la relación $\vdash$ se preserva soundness. En caso negativo, demuestre que no es posible lo anterior.

5. Se quiere, en cada caso, encontrar un conjunto de fórmulas Γ que satisfaga las condiciones requeridas. Si esto es posible, dar un conjunto Γ y probar que la elección es válida. En caso contrario, justificar por qué no es posible encontrarlo.

1. $\phi \notin \Gamma$ y $\Gamma \vdash \phi$, donde $\phi \equiv (p_0 \to \neg p_0) \wedge (\neg p_0 \to p_0)$

2. Γ consistente, $\neg(p_0 \vee p_1) \notin \Gamma$ y $\Gamma \vdash \neg(p_0 \vee p_1)$

3. Γ inconsistente y $\Gamma \nvdash p_0 \to p_1$ No.

4. Γ sólo contiene tautologías y $\Gamma \vdash p_0$?

6. Sea Γ un conjunto no vacío de tautologías. Demuestre que, para toda fórmula $\phi \in \text{PROP}$ se cumple:

$$\Gamma \vdash \phi \quad \text{si y sólo si} \quad \phi \text{ es una tautología}$$