Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO
Av. Pellegrini 250, S2000BTP Rosario, Sta. Fe



EXAMEN FINAL 19/02/2024 Nombre Carrera:

1. Sea la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   a) Calcular su polinomio característico.
   b) Calcular su polinomio minimal.
   c) Calcular su matriz de Jordan asociada.

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ cuyos autovalores son 0, 1 y 2 y autovectores $u_0$, $u_1$ y $u_2$ respectivamente.
   a) Calcular las dimensiones del espacio nulo y del espacio fila de la matriz $A$ y su determinante.
   b) Hallar una base del espacio nulo de $A$.
   c) Hallar todas las soluciones del sistema $Ax = -2u_1 + 3u_2$.
   d) ¿Tiene solución el sistema $Ax = u_0$? Justificar la respuesta.

3. Para cada $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^t \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, se define el conjunto $U_b = \{x \in \mathbb{R}^n : b^t x = 0\}$.
   a) Probar que, para todo $b \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $U_b$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
   b) Suponiendo $b_1 \neq 0$, determinar una base de $U_b$.
   c) Sean $A_1, A_2, \cdots, A_n$ vectores en $\mathbb{R}^n$ tales que $A_i$ tiene coordenadas $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$.
      i) ¿Existe un vector $b \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ de manera que $U_b$ contiene todos los vectores $A_i$? ¿De qué depende?
      ii) ¿De qué sistema de ecuaciones tiene que ser solución el vector $b$ para que la respuesta sea afirmativa en el ítem anterior?
      iii) Dar un ejemplo de vectores $A_1, A_2$ y $A_3$ en $\mathbb{R}^3$ donde no exista tal vector $b$ y un ejemplo donde exista más de uno.

4. Sea $V$ un espacio vectorial y sean $W_1$ y $W_2$ dos subespacios de $V$ tales que $V = W_1 \oplus W_2$, y sean $\langle .,. \rangle_1$ y $\langle .,. \rangle_2$ dos productos internos sobre $W_1$ y $W_2$ respectivamente.
   Defina una operación $\langle .,. \rangle$ que sea un producto interno en $V$ y que satisfaga simultáneamente las siguientes condiciones:
   a) El complemento ortogonal de $W_1$ respecto de $\langle .,. \rangle$ es $W_2$.
   b) Si $x$ e $y$ están en $W_1$ (o en $W_2$) entonces $\langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle_1$ ($= \langle x, y \rangle_2$ respectivamente).

5. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales. Considerar la aplicación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^4$ que a cada polinomio $p \in \mathbb{R}_2[x]$ le asigna $(p(0), p(1), p(2), p(3))$. Se pide:
   a) Obtener la matriz asociada a $T$ respecto de las bases canónicas.
   b) Obtener las coordenadas de $T(2x^2 - x + 1)$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$.
   c) Determinar el núcleo y el recorrido de $T$.



ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250, Rosario
+54 0341 - 480 2649 interno 216 - 119

Scanned with CamScanner