Métodos Numéricos - LCC 2025
Docentes: Alejandro G. Marchetti, Juan Manuel Rabasedas, Brian Luporini
Examen Final - 06 de agosto de 2025

Nombre y Apellido:

Instrucciones Generales

- Realizar cada ejercicio en una hoja separada.
- Entregar los archivos de Scilab utilizados incluyendo (i) el código de las funciones empleadas, y (ii) el llamado a dichas funciones y en forma comentada la respuesta obtenida.

Práctica 3: Resolución de Ecuaciones No Lineales.

1) Considere el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0,$$
$$f_2(x_1, x_2) = e^{x_1} - x_2 - 1 = 0.$$

Se desea obtener la solución positiva de este sistema, para lo cual se propone la solución inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [1{,}5,\ 1{,}5]^T$.

a) Resolver el sistema mediante el método de Newton.

b) Resolver el sistema mediante el método de punto fijo:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - C \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$$

Verificar numéricamente cómo varía la velocidad de convergencia en función de la elección de la constante C.

Práctica 4. Sistemas de Ecuaciones Lineales. Métodos Directos.

2) Considere el sistema $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ donde

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Chequee en SCILAB que la matriz A es simétrica y definida positiva.

b) Calcule en SCILAB las factorizaciones QR y de Cholesky de A.

c) Utilice las factorizaciones del ítem b) para resolver el sistema $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con sustitución regresiva y/o progresiva.

d) Si $\mathbf{x}_{\text{chol}}$ y $\mathbf{x}_{\text{qr}}$ son las soluciones obtenidas a través de las factorizaciones de Cholesky y QR, respectivamente, calcule $\|\mathsf{A}\mathbf{x}_{\text{chol}} - \mathbf{b}\|_2$ y $\|\mathsf{A}\mathbf{x}_{\text{qr}} - \mathbf{b}\|_2$. ¿Cuál aproximación minimiza el error?

Práctica 5: Sistemas de Ecuaciones Lineales. Métodos Iterativos.

3) Escribir un programa en Scilab que resuelva específicamente el siguiente sistema de ecuaciones lineales empleando el método de Gauss Seidel para cualquier valor de n.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se puede demostrar que la solución exacta es $x_i = -n/4 + i/2$, $i = 1, 2, \dots, n$.

a) Obtener la fórmula iterativa del método de Gauss-Seidel para el sistema dado. Resolver para $n = 10$ partiendo de $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Contar el número de iteraciones.

b) Obtener la matriz de iteración del método y determinar su radio espectral.

c) Repetir los dos items anteriores usando esta vez una matriz con elementos diagonales iguales a 4 en lugar de 2. Discutir los resultados.