Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Álgebra Lineal - LCC, LM, PM - 2025

Primera Evaluación Parcial - 21/04/2025

Apellido y nombre: Carrera:

1. Considere

   el conjunto $V = \{p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}_3[x] : a_3 + 2a_2 - a_0 = 0\}$, y
   una función $T : \mathbb{R}^3 \to V$ definida por $T(a, b, c) = 2ax^3 - ax^2 + (b - c)x$.

   (a) Pruebe que V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma y producto por escalar usuales de polinomios.
   (b) Calcule una base y la dimensión de V.
   (c) Pruebe que T es una transformación lineal.
   (d) Calcule el núcleo, la imagen, la nulidad y el rango de T.
   (e) Determine si T es un monomorfismo, un epimorfismo o un isomorfismo. Justifique su respuesta.

2. Sea $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ una función tal que

$$T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = (1,-1), \quad T\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = (0,1), \quad T\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix} = (0,0), \quad T\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = (-2,1).$$

   (a) Pruebe que T define una única transformación lineal.
   (b) Explicite la ley general de T para una matriz genérica $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.
   (c) Dadas las bases

$$\mathfrak{B}_1 = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\} \quad \text{y} \quad \mathfrak{B}_2 = \{(1,1),(0,1)\}$$

   de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente, calcule $[T]_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}$.

3. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

   (a) Sean $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0,\ x + 2y = 0\}$ y $W = \text{span}\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$ dos subespacios de $\mathbb{R}^4$. Entonces $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.
   (b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ y $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$, existe otra base $\mathfrak{B}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $A = C_{\mathfrak{B}\to\mathcal{C}}$.
   (c) Existe $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ tal que $f(1, 0, 0) = -1$ y $f|_W \equiv 0$ para $W = \text{span}\{(0, -1, 1), (0, 0, 1)\}$.