Álgebra Lineal - LCC - LM - PM **Examen Final - 18/02/2021**

Apellido y Nombre: **Legajo:** **Carrera:**

1. Determinar para qué valores de $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$ el espacio nulo de A tiene dimensión 1. Explicitar, en función de estos parámetros un vector no nulo perteneciente al complemento ortogonal de $N(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ d & e & 0 \end{bmatrix}, \text{ sabiendo que } a \neq 0.$$

2. Sea la transformación lineal $T : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(a+bx) = \begin{bmatrix} a+3b \\ 2a+8b \end{bmatrix}$.

   a) Obtener $N(T)$ y $Rec(T)$ y las dimensiones de cada uno de los subespacios. Determinar si T es un monomorfismo. Justificar la respuesta.

   b) Hallar la matriz asociada a T con respecto a las bases $\mathscr{B}_1 = \{1+2x, 5-x\}$, de $\mathbb{R}[x]$ y $\mathscr{B}_2 = \{(1,2),(3,2)\}$, de $\mathbb{R}^2$.

   c) Sea $\mathscr{B} = \{1,x\}$ base de $\mathbb{R}[x]$. Hallar la matriz de cambio de base de $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}_1$.

   d) A partir de los resusltado de los ítems *b*) y *c*), obtener la matriz asociada a T con respecto a las bases $\mathscr{B}$ y $\mathscr{B}_2$.

3. Sea $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, se define el producto interno:

$$\left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right\rangle = 3ae + bf + cg + 3dh.$$

   Sea $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ a & c \end{bmatrix} : a,c \in \mathbb{R} \right\}$ un subespacio de V.

   a) Determinar $H^{\perp}$.

   b) Escribir la matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ como la suma de dos vectores $C = A + B$ tales que $A \in H$ y $B \in H^{\perp}$.

   c) Calcular la distancia entre los vectores C e I.

   d) Encontrar una base ortonormal de V.

4. Sea $A = dE_3 + I_3 = d \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   a) ¿Para qué valores de $d \in \mathbb{C}$ resulta A diagonalizable por una matriz unitaria?

   b) Probar que si λ es autovalor de E_3 entonces $d\lambda + 1$ es autovalor de A.

   c) Encontrar los valores de $d \in \mathbb{C}$ para los cuales A es una matriz singular.

   d) Determinar los autovalores de A^4, con $c = i$. (Ayuda: calcular primero los autovalores de E_3.)

5. Sea $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1+i & 0 & -1+i \\ -1-i & 0 & 1-i \end{bmatrix}$.

   a) Justificar por qué A es diagonalizable por una matriz unitaria.

   b) Calcular los autovalores de A.

   c) Justificar por qué A admite descomposición espectral y encontrar la matriz proyección sobre uno de sus autoespacios.