Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
ANÁLISIS MATEMÁTICO II
Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación, Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2024

Apellido y Nombre:..... Legajo: ..... Carrera: .....

Examen Final - Febrero 2024

1. Sea $F : D \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$F(x) = \int_1^{x^2} \frac{x}{t(t^2+1)}\, dt + \frac{x \ln(x^4+1)}{2}.$$

Resuelva lo que sigue, justificando convenientemente.

a) Indique el dominio D para F,

b) Analice la continuidad y diferencibilidad de la función F en D.

c) Encuentre los máximos y mínimos locales y absolutos.

d) Encuentre intervalos de crecimiento y decrecimiento de F.

e) Determine intervalos de concavidad y convexidad. Encuentre puntos de inflexión.

f) Indique si las función es par e impar. Calcule los límites en $\pm\infty$.

g) Con la información recabada esboce una posible gráfica para F.

2. Dada la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{yx^2 - y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Determine los puntos de continuidad de f.

b) Calcule las derivadas parciales de f en $(0,0)$.

c) Analice la diferenciabilidad de f.

3. *a*) Pruebe que si $0 \leq x \leq 0{,}2$ entonces

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + r(x) \quad \text{donde} \quad |r(x)| \leq \frac{1}{10^4 \cdot 1125}$$

b) Utilice la estimación de la parte a) para encontrar un valor aproximado de la integral:

$$\int_0^{\sqrt{1/5}} \cos\left(t^2\right)\, dt$$

y estime el error cometido.

4. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente la respuesta.

   a) Sea f una función n-veces derivable en el punto a. Entonces el polinomio de Taylor de grado n en a, digamos $P_{n,a}(x)$ es el único polinomio tal que $f^k(a) = P_{n,a}^k(a)$ para todo $0 \leq k \leq n$.

   b) Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la función dada por

   $$F(x) = Ax$$

   donde A es una matriz cuadrada real $n \times n$. Entonces el jacobiano de F en cualquier x_0 coincide con la matriz A.

   c) Sea $f : (0, 2] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces la siguiente integral diverge

   $$\int_0^2 f(t)\, dt.$$

   d) Sean f y g dos funciones positivas definidas en el mismo intervalo $[a, b]$ cuyas gráficas determinan con el eje x regiones R_f y R_g. Si ambas regiones tienen el mismo área y el volumen de los cuerpos de revolución que se obtienen al rotar R_f y R_g alrededor del eje x es el mismo, entonces f y g coinciden.

5. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $\text{grad}(f)(a) \neq 0$.

   a) Dado $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $\frac{\partial f}{\partial v}(a) > 0$, pruebe que f crece en a en la dirección de v. En particular, f crece en la dirección de $\text{grad}(f)(a)$.

   b) Pruebe que de entre todas las direcciones en las que f crece en a, $\text{grad}(f)(a)$ es la dirección de máximo crecimiento.

   c) Pruebe que $\text{grad}(f)(a)$ es perpendicular al conjunto de nivel $c = f(a)$ de f en el punto a.